Particiones de un conjunto finito

Por ejemplo, la partición del conjunto $A = \{1,2,3,4\}$ es la unión de los siguientes conjuntos:

$A_1 = \Big\{\{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}\Big\}$
$A_2 = \Big\{\{\{1\},\{2\},\{3,4\}\},\{\{1\},\{3\},\{2,4\}\},\{\{1\},\{4\},\{2,3\}\},\{\{2\},\{3\},\{1,4\}\},\{\{2\},\{4\},\{1,3\}\},\{\{3\},\{4\},\{1,2\}\}\Big\}$
$A_3 = \Big\{\{\{1,2\},\{3,4\}\},\{\{1,3\},\{2,4\}\},\{\{1,4\},\{2,3\}\}\Big\}$
$A_4 = \Big\{\{\{1\},\{2,3,4\}\},\{\{2\},\{1,3,4\}\},\{\{3\},\{1,2,4\}\},\{\{4\},\{1,2,3\}\}\Big\}$
$A_5 = \Big\{\{1,2,3,4\}\Big\}$

Por consiguiente, el conjunto de particiones de A es $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$.

Número de particiones de un conjunto finito

El número de particiones de un conjunto de $n = 4$ elementos es el número de Bell:

$$B_4 = \#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3) + \#(A_4) + \#(A_5) = 1 + 6 + 3 + 4 + 1 = 15$$

Ahora, el número de maneras en que se puede particionar un conjunto de n elementos en subconjuntos no vacíos que no se superponen es también el número de relaciones de equivalencia que se pueden establecer en él, es decir,

$$B_n = n! \sum_{\sum_{i=1}^{n} i m_i = n} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k)!\,(k!)^{m_k}} \right)$$

Aplicando lo anterior, se obtiene el número de Bell:

$$B_4 = 4!\Bigg[\frac{1}{4!\,(1!)^4}\frac{1}{0!\,(2!)^0}\frac{1}{0!\,(3!)^0}\frac{1}{0!\,(4!)^0} + \frac{1}{2!\,(1!)^2}\frac{1}{1!\,(2!)^1}\frac{1}{0!\,(3!)^0}\frac{1}{0!\,(4!)^0} + \frac{1}{0!\,(1!)^0}\frac{1}{2!\,(2!)^2}\frac{1}{0!\,(3!)^0}\frac{1}{0!\,(4!)^0}$$
$$+ \frac{1}{1!\,(1!)^1}\frac{1}{0!\,(2!)^0}\frac{1}{1!\,(3!)^1}\frac{1}{0!\,(4!)^0} + \frac{1}{0!\,(1!)^0}\frac{1}{0!\,(2!)^0}\frac{1}{0!\,(3!)^0}\frac{1}{1!\,(4!)^1}\Bigg] = 15$$

Los números de Bell satisfacen la siguiente fórmula recursiva:

$$B_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j = 0 \\ B_{i-1,i-1}, & i > 0, j = 0 \\ B_{i-1,j-1}, & 0 < j \le i \end{cases}$$

Luego,

$$B_n = B_{n,n} = \sum_{j=0}^{n} B_{n,j} = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} B_k\,, & n > 0 \end{cases}$$